

TFE4100 Kretsteknikk

Kompendium

Eirik Refsdal <eirikref@pvv.ntnu.no>

16. august 2005

Innhold

1	Introduksjon til elektriske kretser	4
1.1	Strøm	4
1.2	Spenning	4
1.3	Strøm- og spenningskilder	4
1.3.1	Strømkilder	5
1.3.2	Spenningskilder	5
1.3.3	Uavhengige kilder	5
1.3.4	Avhengige kilder	5
1.4	Praktiske strøm- og spenningskilder	5
1.5	Effekt	5
1.6	Passiv fortegnskonvensjon	6
1.7	i - v -karakteristikk	6
1.8	Motstand og Ohms lov	6
1.9	Åpne og kortsluttede kretser	7
1.10	Seriekobling	7
1.11	Parallellkobling	7
1.12	Spenningsdeler	8
1.13	Strømdeler	8
1.14	Wheatstone bridge	8
1.15	Måleinstrumenter	9
1.15.1	Ohmmeter	9
1.15.2	Amperemeter	9
1.15.3	Voltmeter	9
1.16	Andre begreper i elektriske nettverk	9
1.16.1	Gren	9
1.16.2	Node	9
1.16.3	Løkke/sløyfe	9
1.16.4	Maske	9
1.16.5	Jord	10
2	Teknikker for kretsanalyse	11
2.1	Nodespenningsmetoden	11
2.1.1	Kretser med strømkilder	11
2.1.2	Kretser med spenningskilder	11
2.2	Maskestrømsmetoden	11
2.2.1	Kretser med spenningskilder	12
2.2.2	Kretser med strømkilder	12
2.3	Node- og maskeanalyse i kretser med avhengige kilder	12
2.4	Cramers metode	12

2.5	Superposisjonsprinsippet	13
2.6	Norton- og Théveninekvivalente kretser	13
2.6.1	Ekvivalensmotstand	14
2.6.2	Théveninspenning	14
2.6.3	Nortonstrøm	14
2.7	Kildetransformasjon	15
2.8	Maksimal effektoverføring	15
2.9	Grafisk analyse av ikke-lineære kretser	15
3	Vekselsstrømanalyse	16
3.1	Kondensatorer	16

1 Introduksjon til elektriske kretser

Ladninger er bipolare, dvs. at elektriske effekter beskrives vha. både positive og negative ladninger. Elektriske ladninger eksisterer i diskrete kvantiteter, $k \times q$, hvor k er et heltall og q er elementærladningen $\pm 1.6022 \times 10^{-19} C$.

1.1 Strøm

Strøm er definert som ladning per tidsenhet,

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad (1)$$

hvor i er strøm i ampere (A), q er ladning i coulomb (C) og t er tid i sekunder (s).

Det er bestemt at positiv retning for strøm er den retningen som de positive ladningene beveger seg.

Det kan kun gå strøm hvis vi har en lukket krets, og Kirchhoffs strømlov sier at summen av strømmen i kretsen er lik null. Mer presist sier den at summen av strømmen inn og ut av en node er lik null,

$$\sum_{n=1}^N i_n = 0 \quad (2)$$

1.2 Spenning

Spenning er definert som energi per ladning,

$$v = \frac{dw}{dq}, \quad (3)$$

hvor v er spenning i volt (V), w er energi i joule (J) og q er ladning i coulomb (C).

Spenning er egentlig forskjell i potensiale mellom to punkter i en krets og angir energien som trengs for å flytte en ladning fra det ene punktet til det andre.

Spenningen i et punkt er forskjellen i potensiale mellom punktet selv og et definert nullnivå i kretsen, også omtalt som "jord".

Kirchhoffs spenningslov sier at summen av spenninger i en krets er lik null,

$$\sum_{n=1}^N v_n = 0 \quad (4)$$

1.3 Strøm- og spenningskilder

Vi deler kilder langs to akser; en som skiller mellom strøm- og spenningskilder, og en som deler mellom uavhengige og avhengige kilder.

1.3.1 Strømkilder

En ideell strømkilde leverer en bestemt mengde strøm til kretsen den er en del av. Spenningen som genereres av kilden er avhengig av kretsen den er en del av.

1.3.2 Spenningskilder

En ideell spenningskilde leverer en bestemt spenning mellom terminalene/endepunktene sine, uavhengig av mengden strøm som passer gjennom den. Mengden strøm som kilden leverer til kretsen avhenger av kretsen selv.

1.3.3 Uavhengige kilder

Uavhengige kilder leverer den angitte mengden strøm eller spenning fullstendig uavhengig av kretsen de er en del av.

1.3.4 Avhengige kilder

Avhengige kilder opererer som en funksjon av en annen strøm eller spenning i kretsen, og leverer feks. $A \times v_x$ volt, hvor v_x er en annen spenning i kretsen.

Vi har fire typer avhengige kilder; spenningskontrollerte spenningskilder, strømkontrollerte spenningskilder, spenningskontrollerte strømkilder og strømkontrollerte strømkilder.

1.4 Praktiske strøm- og spenningskilder

Praktiske strøm- og spenningskilder har en indre motstand som begrenser den spenningen eller strømmen de kan levere til terminallasten.

Gitt en spenningskilde som leverer spenningen v_s til en krets med last R_L , vil strømmen som spenningskilden leverer til kretsen typisk måtte gå mot uendelig når R_L går mot null, slik at spenningskilden får opprettholdt spenningen den skal levere.

Dette er naturligvis ikke mulig i praksis, og er begrenset av den interne motstanden.

En spenningskilde vil være seriekoblet med en minst mulig motstand, slik at spenningsfallet over motstanden skal bli minst mulig, mens en strømkilde vil være parallellkoblet med en størst mulig motstand, slik at strømtapet skal bli minst mulig.

1.5 Effekt

Effekt er definert som arbeid per tidsenhet,

$$p = \frac{dw}{dt} = \left(\frac{dw}{dq} \right) \left(\frac{dq}{dt} \right) = vi, \quad (5)$$

hvor p er effekt i watt (W), w er energi i joule (J), t er tid i sekunder (s), q er ladning i coulomb (C), v er spenning i volt (V) og i er strøm i ampere (A).

I likhet med strøm og spenning kan effekt være både positiv og negativ, som kan tolkes dithen at en kilde feks. kan *tilføre* energi, mens en last *braker* energi.

Ved hjelp av Ohms lov (avsnitt 1.8) er alle følgende uttrykk gyldige for effekten som forbrukes av en motstand,

$$p = vi = i^2 R = \frac{v^2}{R} \quad (6)$$

1.6 Passiv fortegnskonvensjon

Når referanseretningen for strømmen gjennom et kretselement er i samme retning som referansespenningsfallet over elementet, skal positivt fortegn brukes i uttrykk som relaterer spenningen til strømmen. Ellers skal negativt fortegn brukes.

1.7 i - v -karakteristikk

En i - v -karakteristikk gir en sammenheng mellom strøm og spenning for et gitt kretselement ved forskjellige strømmen og spenninger, og fremstilles gjerne grafisk.

Ikke bare gir dette en karakteristikk av elementet, men det gjør det også lett å lese av strømmen gjennom elementet gitt en bestemt spenning (og motsatt), samt å lese effektbruk rett ut av grafen/tabellen.

1.8 Motstand og Ohms lov

Strøm som går gjennom ledere eller andre kretselementer møter en viss motstand, som er bestemt av de elektriske egenskapene til materialet elementet er laget av. Denne motstanden forårsaker at energi vil bli brukt opp og “forsvinne” ut av kretsen i form av varme.

En ideell motstand er en enhet som har lineære motstandsegenskaper i samsvar med Ohms lov,

$$v = iR, \quad (7)$$

hvor v er spenning i volt (V), i er strøm i ampere (A) og R er motstand i ohm (Ω).

Et materiales motstand er avhengig av dets motstandsevne, ρ , som er den inverse av materialets ledningsevne, σ . Av dette har man også definert konduktans, som er den inverse av motstand,

$$G = \frac{1}{R}, \quad (8)$$

hvor G er konduktans i siemens (S) og R er motstand i ohm (Ω).

Følgelig kan også Ohms lov skrives om ved hjelp av konduktans,

$$i = Gv \quad (9)$$

Det er også viktig å merke seg at Ohms lov kun er en empirisk tilnærming til de fysiske egenskapene til elektrisk ledende materialer, som typisk vil slå feil ved svært høye strømmer og/eller spenninger.

1.9 Åpne og kortsluttede kretser

Formelt sett er en kortslutning definert som et kretselement hvor spenningen over er lik null, uavhengig av strømmen som går gjennom. Det vil i praksis si at motstanden til kretselementet går mot null, noe som er tilfelle for feks. mange ledninger og kabler.

Tilsvarende er en åpen krets definert som et kretselement hvor motstanden går mot uendelig.

1.10 Seriekobling

To eller flere kretselementer sies å være seriekoblet dersom samme strøm går gjennom hvert av dem.

For motstander i serie kan man regne ut en ekvivalensmotstand, R_{EQ} , som er gitt ved,

$$R_{EQ} = \sum_{n=1}^N R_n \quad (10)$$

1.11 Parallellkobling

To eller flere kretselementer sies å være parallellkoblet dersom samme spenning ligger over hvert av dem.

For motstander i parallell kan man regne ut en ekvivalensmotstand, R_{EQ} , som er gitt ved,

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}} \quad (11)$$

1.12 Spenningsdeler

Seriekoblede kretselementer vil ha samme strøm gjennom seg, men naturligvis ikke samme spenning over. Spenningen over hvert enkelt av dem er gitt ut fra forholdet mellom dets egen motstand og den totale motstanden i seriekoblingen på følgende vis,

$$v_n = \frac{R_n}{R_1 + R_2 + \dots + R_n + \dots + R_N} v_S \quad (12)$$

1.13 Strømdeler

Parallellkoblede kretselementer vil ha samme spenning over seg, men ikke uten videre samme strøm gjennom. Strømmen gjennom hvert enkelt av dem er gitt ut fra forholdet mellom dets egen motstand og den totale motstanden i parallellkoblingen på følgende vis,

$$i_n = \frac{\frac{1}{R_n}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} + \dots + \frac{1}{R_N}} i_S \quad (13)$$

1.14 Wheatstone bridge

Wheatstone bridge-kretsen brukes til nøyaktige målinger av kretselementer med motstand mellom 1Ω og $1 M\Omega$, og består av fire motstander arrangert som vist i figur (sett inn figur her).

I utgangspunktet skal spenningsforskjellen mellom node a og b være null, slik at kretsen er i balanse. Hvis dette ikke er tilfelle er spenningsforskjellen gitt ved følgende likning,

$$v_{ab} = v_a - v_b = v_s \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_x}{R_3 + R_x} \right) \quad (14)$$

For en krets i balanse kan R_x regnes ut vha. følgende formel

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_3 \quad (15)$$

1.15 Måleinstrumenter

1.15.1 Ohmmeter

Et ohmmeter måler et kretselements motstand. Denne målingen kan kun foregå når kretselementet ikke er koblet til andre elementer.

1.15.2 Amperemeter

Et amperemeter måler strømmen som går gjennom et kretselement. Det er viktig at amperemeteret har en intern motstand som er tilnærmet lik null og at det kobles i serie med elementet man ønsker å måle strømmen gjennom. En parallellkobling av et amperemeter vil fungere som en kortslutning og forstyrre kretsen.

1.15.3 Voltmeter

Et voltmeter måler spenningen som ligger over et kretselement. Det er viktig at voltmeteret har en intern motstand som går mot uendelig (det er naturligvis ikke mulig i praksis, men kan virke sånn sett i forhold til resten av kretsen), samt at det kobles i parallell med elementet vi ønsker å måle.

1.16 Andre begreper i elektriske nettverk

1.16.1 Gren

En gren er en vilkårlig del av en krets som har to terminaler/endepunkter. En gren kan inneholde et vilkårlig antall kretselementer og forbinder i praksis to noder.

1.16.2 Node

En node er et punkt i en krets hvor to eller flere grener er koblet sammen. Man skiller gjerne mellom trivielle noder, som er punkter hvor kun to grener møtes, og vesentlige noder, som er punkter hvor mer enn to grener møtes.

1.16.3 Løkke/sløyfe

En løkke/sløyfe er en hvilken som helst bane av grener gjennom kretsen.

1.16.4 Maske

En maske er en løkke/sløyfe som ikke inneholder andre løkker/sløyfer.

1.16.5 Jord

Som nevnt i punkt 1.2 er jord et valgt nullpunkt i kretsen, som man bruker som referansepunkt i utregninger.

2 Teknikker for kretsanalyse

2.1 Nodespenningsmetoden

Nodespenningsloven har følgende fire grunnprinsipper,

- ① Velg en referansenode, vanligvis jord.
- ② Definer de $n - 1$ andre vesentlige nodene som de ukjente variablene $V_a, V_b,$ osv.
- ③ Skriv opp Kirchhoffs strømlov for hver av de $n - 1$ nodene, hvor strømmene - som oftest - er uttrykt som $\frac{V}{R}$, der V vanligvis blir spenningsforskjellen mellom de aktuelle nodene, feks. $V_a - V_b$. Strømmer inn i noden angis med positivt fortegn, mens strømmer ut regnes som negative.
- ④ Løs likningssettet.

2.1.1 Kretser med strømkilder

Kretser med strømkilder gjør nodespenningsmetoden enda enklere, siden det bare er å sette verdiene for strømkildene rett inn.

2.1.2 Kretser med spenningskilder

Spenningskilder i kretsen gjør også utregningene lettere, siden de gir ferdige tallsvar for opptil flere noder.

2.2 Maskestrømsmetoden

Maskestrømsmetoden har mange likhetstrekk med nodespenningsmetoden, og kan forklares med følgende tre prinsipper,

- ① Definer samtlige maskestrømmer konsekvent - nærmere bestemt med klokka.
- ② Skriv opp Kirchhoffs spenningslov for hver enkelt maskestrøm, hvor hver spenning uttrykkes som maskestrøm ganget med motstand. For kretselementer som berøres av to maskestrømmer, skal man for hver maskestrøm føre opp et uttrykk av typen, $(i_x - i_y) \times R$, hvor i_x er maskestrømmen til masken vi analyserer akkurat nå og i_y er maskestrømmen til den andre masken som berører kretselementet. Bare vær konsekvent, så går alt bra.
- ③ Løs likningssettet.

2.2.1 Kretser med spenningskilder

Maskestrømsmetoden er ekstra effektiv for kretser som kun består av spenningskilder, siden det også her bare er å sette spenningsverdiene rett inn i uttrykkene for Kirchhoffs spenningslov.

2.2.2 Kretser med strømkilder

Kretser med strømkilder byr ikke på spesielt store problemer enn andre kretser, men husk å ha med som en ekstra ligning at $i_x - i_y = nA$, hvor i_x og i_y er de to maskestrømmene og nA er strømkilden på n ampere.

2.3 Node- og maskeanalyse i kretser med avhengige kilder

Ved avhengige kilder i kretsen kan vi bruke følgende fremgangsmåte,

- ① Se på de avhengige kildene som uavhengige og sett opp nodespennings- eller maskestrømslikninger deretter.
- ② Erstatt avhengigheten, feks. βi_x , med nodespennings- eller maskestrømslikningen som uttrykker variabelen, i dette eksempelet i_x .
- ③ Løs likningssettet.

2.4 Cramers metode

Et typisk likningssett man får ved bruk av nodespennings- eller maskestrømsmetoden kan se ut som dette,

$$21i_1 - 9i_2 - 12i_3 = -33 \quad (16)$$

$$-3i_1 + 6i_2 - 2i_3 = 3 \quad (17)$$

$$-8i_1 - 4i_2 + 22i_3 = 50 \quad (18)$$

Det er ingen stor heksekunst å løse likningssettet på tradisjonelt vis, men det kan ofte være like raskt å bruke Cramers metode for å få ut de tre ukjente.

Hver ukjent i likningssettet uttrykkes da som forholdet mellom to determinanter,

$$x_k = \frac{N_k}{\Delta}, \quad (19)$$

hvor x_k er den ukjente vi ønsker å finne, N_k er determinanten for ukjent variabel k og Δ er den såkalte karakteristiske determinanten.

Δ er lik for alle x_k og vil i tilfellet over være,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 21 & -9 & -12 \\ -3 & 6 & -2 \\ -8 & -4 & 22 \end{vmatrix} \quad (20)$$

Determinanten i telleren, N_k , lages ved å bytte ut kolonne k i Δ med kolonnen på høyre side av likhetstegnet i likningssettet.

I tilfellet over får vi følgende tre determinanter,

$$N_1 = \begin{vmatrix} -33 & -9 & -12 \\ 3 & 6 & -2 \\ 50 & -4 & 22 \end{vmatrix} \quad (21)$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} 21 & -33 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \\ -8 & 50 & 22 \end{vmatrix} \quad (22)$$

$$N_3 = \begin{vmatrix} 21 & -9 & -33 \\ -3 & 6 & 3 \\ -8 & -4 & 50 \end{vmatrix} \quad (23)$$

2.5 Superposisjonsprinsippet

Superposisjonsprinsippet sier at i en lineær krets med N kilder, er hver grenstrøm og hver grenspenning summen av de N strømmer og spenninger man får ved å sette alle kilder unntatt én lik null og løse kretsen.

Algoritmen for å bruke superposisjonsprinsippet blir altså,

- ① Velg én og én av kildene i kretsen, og erstatt de resterende strømkildene med en åpen krets og de resterende spenningskildene med en kortslutning.
- ② Regn ut hver grenstrøm og grenspenning i denne “nye” kretsen med bare én kilde.
- ③ Summer alle grenstrømmer og grenspenninger fra de forskjellige kretsene.

2.6 Norton- og Théveninekvivalente kretser

En krets som består av ideelle strøm- og spenningskilder og lineære motstander kan, *sett fra en lasts ståsted*, erstattes med en enkel krets bestående kun av én motstand og enten en strømkilde koblet i parallell eller en spenningskilde koblet i serie.

Den ekvivalente kretsen med strømkilde kalles Nortonekvivalent, mens kretsen med spenningskilde kalles Théveninekvivalent.

Det er essensielt å huske at dette er fra en lastes ståsted.

2.6.1 Ekvivalensmotstand

Den ekvivalente motstanden, som er den samme enten vi har en Norton- eller en Théveninekvivalent krets, regnes ut ved følgende algoritme,

- ① Fjern lasten fra kretsen.
- ② Alle kilder i kretsen settes lik null, det vil igjen si at strømkilder erstattes med en åpen krets og spenningskilder med en kortslutning.
- ③ Beregn den totale motstanden mellom terminalene til lasten, fremdeles med selve lasten fjernet. Her er det en fordel å begynne på motstatt side av lasten i kretsen og arbeide seg systematisk mot lastterminalene.

2.6.2 Théveninspenning

Théveninspenningen finnes ved å følge følgende steg,

- ① Fjern lasten og la lastterminalene stå igjen som en åpen krets.
- ② Definer spenningen, v_{OC} (open circuit), mellom lastterminalene.
- ③ Bruk ønsket teknikk for kretsanalyse (nodespenning, maskestrøm, osv.) til å beregne v_{OC} .
- ④ Théveninspenningen er lik spenningen mellom lastterminalene, $v_T = v_{OC}$.

2.6.3 Nortonstrøm

Nortonstrømmen finnes på følgende måte,

- ① Erstatt lasten med en kortslutning.
- ② Definer strømmen gjennom kortslutningen som Nortonstrømmen, $i_N = i_{SC}$ (short circuit).
- ③ Bruk ønsket teknikk for kretsanalyse for å finne i_{SC} .

2.7 Kildetransformasjon

I avsnitt 2.6 ble det slått fast at en krets kan erstattes med motstand og *enten* en strømilde koblet i parallell *eller* en spenningskilde koblet i serie. Med andre ord er også en krets bestående av den nevnte strømkilden i parallell med motstanden ekvivalent med en krets bestående av spenningskilden i serie med motstanden, så lenge vi benytter følgende relasjon,

$$v_T = R_T i_N \quad (24)$$

Ved å utnytte dette konseptet systematisk kan man lett redusere store og tilsynelatende uoverkommelige kretser ned til en enkel og håndterlig krets.

Altså: *Spenningskilde i serie med motstand erstattes med strømkilde i parallell med motstand*

2.8 Maksimal effektoverføring

Teoremet for maksimal effektoverføring forteller oss hvor mye effekt vi maksimalt kan overføre til lasten fra resten av kretsen.

Utleddning og løsning av maksverdi-problemet gir oss maksimal effekt når lasten er lik ekvivalensmotstanden, $R_T = R_L$.

2.9 Grafisk analyse av ikke-lineære kretser

Grafisk analyse av ikke-lineære kretser er et hendig knep for å finne strøm gjennom og spenning over et ikke-lineært kretselement uten å måtte gjøre grisete utregninger.

Trikset er å

- ① Sette det ikke-lineære kretselementet som last
- ② Finne Thévenin- og Norton-ekvivalentene for kretsen
- ③ Plotte kretselementets $i - v$ -karakteristikk sammen med en såkalt lastlinje, som har V_T som eneste punkt på x-aksen og $\frac{V_T}{R_T}$ som eneste punkt på y-aksen.

Det ikke-lineære kretselementets strøm og spenning er nå verdiene der de to linjene møtes, det så kalte operasjonspunktet.

3 Vekselsstrømanalyse

3.1 Kondensatorer

En kondensator er egentlig en åpen krets i form av to plater med “luft” mellom. Den burde altså ikke kunne føre strøm, men takket være kvantemekaniske vidervedigheter (som ligger utenfor pensum) gjør den nå engang det; men vel å merke kun ved endringer i spenning eller strøm i kretsen.

Når kondensatoren har kommet i likevekt fungerer den nok en gang som en åpen krets.